

22.1

Ф 69

Министерство образования  
и науки Российской Федерации  
рекомендует

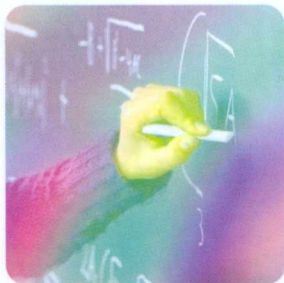
Учебник

# Высшая математика

для гуманитарных направлений

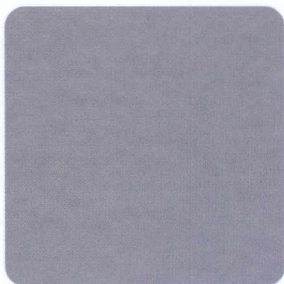
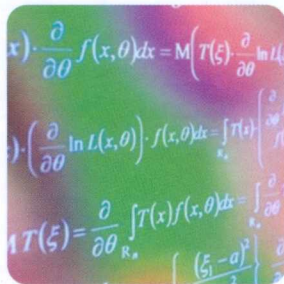
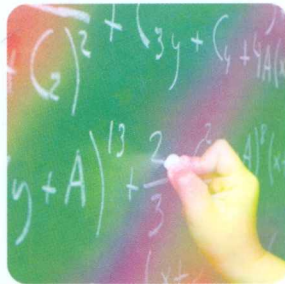
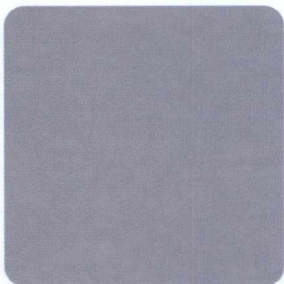
**А. В. Дорофеева**

б а з о в ы й к у р с



3-е издание

БАКАЛАВР



**Юрайт**  
ИЗДАТЕЛЬСТВО

А. В. Дорофеева

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

3-е издание, переработанное и дополненное

ВВЕДЕНО  
В КОМПЬЮТЕР

*Рекомендовано Министерством образования  
Российской Федерации в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по гуманитарно-социальным специальностям*

Москва ■ Юрайт ■ 2016

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73  
Д69

**Автор:**

**Дорофеева Алла Владимировна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

**Рецензенты:**

**Ширяев А. Н.** — член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук;

**Миронов В. В.** — профессор, доктор философских наук;

**Рыбников К. А.** — заслуженный деятель науки РФ, профессор, доктор физико-математических наук.

**Дорофеева, А. В.**

Высшая математика для гуманитарных направлений : учебник для бакалавров / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 400 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-2641-5

В книге изложен курс высшей математики для студентов, специализирующихся в области гуманитарных наук. Материал соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту ВПО третьего поколения для направления 520400 «Философия».

*Для студентов философских факультетов, а также студентов и аспирантов, специализирующихся в философии и лингвистике, религиоведении, политологии, социологии и психологии, юридических и педагогических науках.*

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73



Учебное издание

Дорофеева Алла Владимировна

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Учебник для бакалавров

Формат 60×90 1/16.

Гарнитура «SchoolBookС». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 25. Заказ №

ООО «Издательство Юрайт»

111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4.

Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru

ISBN 978-5-9916-2641-5

© Дорофеева А. В., 2012

© ООО «Издательство Юрайт», 2016

## Оглавление

|   |    |
|---|----|
| Предисловие .....   | 12 |
| Введение .....  | 13 |
| Математические обозначения .....  | 14 |
| Латинский алфавит .....   | 16 |
| Греческий алфавит .....   | 16 |
| <u>Глава 1</u>  |    |
| <b>Множества</b>  |    |
| 1.1. Понятие множества .....  | 17 |
| 1.2. Сумма множеств .....   | 20 |
| 1.3. Произведение множеств .....  | 21 |
| 1.4. Подмножества .....   | 23 |
| 1.5. Сравнение свойств операций с множествами и операций с числами .....            | 24 |
| 1.6. Дополнение множества .....   | 26 |
| 1.7. Разбиение множества .....  | 28 |
| 1.8. Прямое произведение двух множеств .....  | 31 |
| 1.9. Бинарные отношения .....   | 33 |
| 1.10. Связь между отношением эквивалентности и разбиением множества на классы ..... | 37 |
| <u>Глава 2</u>  |    |
| <b>Функции</b>  |    |
| 2.1. Определение функции. Связь с бинарными отношениями ..                          | 41 |
| 2.2. Свойства функций .....   | 45 |
| 2.3. Обратные функции .....   | 48 |
| 2.4. Суперпозиция функций .....   | 51 |
| 2.5. Взаимно-однозначное соответствие между двумя множествами .....                 | 52 |
| <u>Глава 3</u>  |    |
| <b>Алгебраические структуры</b>   |    |
| 3.1. Операции .....   | 57 |
| 3.2. Свойства операций .....  | 59 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.3. | Определение группы. . . . .                                 | 64 |
| 3.4. | Свойства коммутативной группы с операцией сложения. . . . . | 66 |
| 3.5. | Операции с множествами. Симметрическая разность . . . . .   | 68 |
| 3.6. | Кольцо. Поле . . . . .                                      | 69 |

#### Глава 4

### Числа и операции с ними

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4.1. | Натуральные числа. . . . .                                      | 75 |
| 4.2. | Кольцо целых чисел . . . . .                                    | 80 |
| 4.3. | Поле рациональных чисел . . . . .                               | 82 |
| 4.4. | Поле действительных чисел. Непрерывность числовой оси . . . . . | 84 |
| 4.5. | Комплексные числа . . . . .                                     | 87 |
| 4.6. | Векторы . . . . .   | 95 |

#### Глава 5

### Числовые функции

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 5.1. | Понятие расстояния. Метрические пространства . . . . .               | 101 |
| 5.2. | Расстояние между точками числовой оси. . . . .                       | 104 |
| 5.3. | Свойства точечных множеств на числовой оси. . . . .                  | 107 |
| 5.4. | Определение числовой функции. Различные способы ее задания . . . . . | 112 |
| 5.5. | Операции на множестве числовых функций . . . . .                     | 116 |
| 5.6. | Класс элементарных функций . . . . .                                 | 118 |
| 5.7. | Последовательность — функция натурального аргумента . . . . .        | 124 |

#### Глава 6

### Теория пределов

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 6.1.  | Вводные замечания о пределе переменной величины . . . . .            | 126 |
| 6.2.  | Бесконечно малые. Теоремы о бесконечно малых . . . . .               | 128 |
| 6.3.  | Предел последовательности . . . . .                                  | 132 |
| 6.4.  | Бесконечно большие величины. Их связь с бесконечно малыми . . . . .  | 138 |
| 6.5.  | Признаки существования предела последовательности . . . . .          | 140 |
| 6.6.  | Число $\epsilon$ . Понятие о натуральных логарифмах . . . . .        | 142 |
| 6.7.  | Предел функции . . . . .   | 145 |
| 6.8.  | Раскрытие неопределенностей . . . . .                                | 154 |
| 6.9.  | Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге . . . . . | 158 |
| 6.10. | Сравнение бесконечно малых . . . . .                                 | 159 |

#### Глава 7

### Непрерывность и разрывы функций

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 7.1. | Определение непрерывности функции. Типы разрывов. . . . .                  | 164 |
| 7.2. | Приращения аргумента и функции. Второе определение непрерывности . . . . . | 169 |
| 7.3. | Операции с непрерывными функциями . . . . .                                | 172 |
| 7.4. | Свойства непрерывных функций . . . . .                                     | 178 |

## Глава 8

### Производная

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 8.1. | Задача нахождения скорости движения . . . . .   | 182 |
| 8.2. | Определение производной . . . . .   | 184 |
| 8.3. | Задача проведения касательной к кривой.<br>Геометрический смысл производной . . . . .   | 186 |
| 8.4. | Связь между непрерывностью<br>и существованием производной . . . . .  | 188 |
| 8.5. | Нахождение производных от основных элементарных<br>функций . . . . .  | 190 |
| 8.6. | Правила вычисления производной от суммы,<br>произведения и частного . . . . .   | 194 |
| 8.7. | Производная от обратной функции. Производные<br>от функций $y = a^x$ , $y = \arcsin x$ , $y = \arccos x$ , $y = \arctg x$ . . . . | 197 |
| 8.8. | Производная от функции $y = f[\varphi(x)]$ .<br>Понятие о производных высших порядков . . . . .                                   | 203 |

## Глава 9

### Приложения производной. Дифференциал. Формула Тейлора

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 9.1. | Теорема Лагранжа о конечном приращении функции . . . . . | 207 |
| 9.2. | Признаки возрастания и убывания функции . . . . .        | 210 |
| 9.3. | Экстремум функции . . . . .                              | 213 |
| 9.4. | Построение графика функции . . . . .                     | 218 |
| 9.5. | Дифференциал функции . . . . .                           | 223 |
| 9.6. | Формула Тейлора . . . . .                                | 226 |

## Глава 10

### Неопределенный интеграл

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 10.1. | Задача, обратная дифференцированию.<br>Первообразные функции . . . . .   | 233 |
| 10.2. | Неопределенный интеграл и его свойства . . . . .   | 235 |
| 10.3. | Составление таблицы неопределенных интегралов . . . . .  | 239 |
| 10.4. | Методы вычисления неопределенных интегралов . . . . .  | 241 |
| 10.5. | Теорема существования неопределенного интеграла.<br>Интегралы, не выражающиеся<br>через элементарные функции . . . . . | 245 |

## Глава 11

### Определенный интеграл

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 11.1. | Определение площади криволинейной трапеции . . . . .               | 247 |
| 11.2. | Определенный интеграл . . . . .                                    | 249 |
| 11.3. | Связь между неопределенным и определенным<br>интегралами . . . . . | 253 |
| 11.4. | Свойства определенного интеграла . . . . .                         | 258 |
| 11.5. | Геометрические приложения определенного интеграла . . . . .        | 260 |
| 11.6. | Несобственные интегралы . . . . .                                  | 266 |

## Глава 12

### Бесконечные ряды

|  |     |
|--|-----|
| 12.1. Определение числового ряда и его суммы.<br>Необходимый признак сходимости ряда . . . . . | 270 |
| 12.2. Ряды с положительными членами . . . . .  | 276 |
| 12.3. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница . . . . .                                       | 280 |
| 12.4. Сходимость произвольных рядов. Условная и абсолютная<br>сходимость . . . . .             | 282 |
| 12.5. Функциональные ряды. Область сходимости.<br>Степенные ряды . . . . .                     | 286 |
| 12.6. Ряд Тейлора . . . . .  | 290 |
| 12.7. Приложения теории бесконечных рядов . . . . .  | 294 |

## Глава 13

### Теория вероятностей и элементы математической статистики

|  |     |
|--|-----|
| 13.1. Предмет теории вероятностей. Случайные события . . . . .   | 297 |
| 13.2. Определения вероятности . . . . .  | 299 |
| 13.3. Вероятность суммы несовместных событий . . . . .   | 301 |
| 13.4. Теорема умножения вероятностей.<br>Вероятность суммы совместных событий . . . . .                            | 303 |
| 13.5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса . . . . .   | 306 |
| 13.6. Элементы комбинаторики . . . . .   | 308 |
| 13.7. Формула Бернулли . . . . .   | 310 |
| 13.8. Случайная дискретная величина и ее закон распределения . . . . .   | 312 |
| 13.9. Математическое ожидание дискретной случайной величины<br>и его основные свойства . . . . .                   | 314 |
| 13.10. Дисперсия и ее свойства . . . . .   | 317 |
| 13.11. Закон больших чисел . . . . .   | 321 |
| 13.12. Непрерывные случайные величины. Интегральная<br>функция распределения . . . . .                             | 324 |
| 13.13. Дифференциальная функция распределения.<br>Числовые характеристики непрерывной случайной величины . . . . . | 327 |
| 13.14. Равномерное распределение . . . . .   | 330 |
| 13.15. Нормальное распределение . . . . .  | 332 |
| 13.16. Вариационные ряды. Статическое распределение.<br>Полигон и гистограмма . . . . .                            | 334 |
| 13.17. Числовые характеристики вариационных рядов . . . . .  | 339 |
| 13.18. Статистические оценки параметров распределения . . . . .  | 343 |

## Глава 14

### Теория бесконечных множеств. Проблемы оснований математики

|   |     |
|---|-----|
| 14.1. Равномощность двух бесконечных множеств . . . . . | 347 |
| 14.2. Счетные множества . . . . .                       | 350 |
| 14.3. Счетность множества рациональных чисел . . . . .  | 353 |
| 14.4. Мощность континуума . . . . .                     | 355 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 14.5. | Определение бесконечного множества . . . . .                                | 357 |
| 14.6. | Сравнение мощностей. Существование сколь угодно больших мощностей . . . . . | 359 |
| 14.7. | Кардинальные числа . . . . .  | 361 |
| 14.8. | Парадоксы теории множеств и проблемы оснований математики. . . . .          | 363 |

## Глава 15

### Исторический очерк развития математики

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 15.1. | Период зарождения математики . . . . .                              | 374 |
| 15.2. | Математика в Древней Греции . . . . .                               | 375 |
| 15.3. | Математика средневекового Востока . . . . .                         | 380 |
| 15.4. | Математика европейского Средневековья и эпохи Возрождения . . . . . | 382 |
| 15.5. | Создание математики переменных величин. . . . .                     | 384 |
| 15.6. | Развитие математики в XVIII в. . . . .                              | 386 |
| 15.7. | Проблемы обоснования математики переменных величин . . . . .        | 387 |
| 15.8. | Период современной математики . . . . .                             | 391 |
|       | Литература . . . . .  | 397 |
|       | Именной указатель . . . . .   | 399 |